תורת הקבוצות, תרגיל 9

1. תהי X קבוצה בת מניה של נקודות במישור. הוכח כי קיימת נקודה p במישור כך שכל מעגל שמרכזו בנקודה p מכיל לכל היותר נקודה אחת מהקבוצה X.
רמז: היעזר בשאלה 2 מתרגיל 8.

2. הוכח, כי קבוצה X היא אינסופית אם ורק אם עבור כל פונקציה $f : X \to X$ קיימת תת קבוצה לא ריקה $A \subseteq X$ כך ש- $A \neq X$ ומתקיים $f(A) \subseteq A$.

3. תהי W קבוצה של סדרות של מספרים חיוביים בעלת התכונה הבאה: לכל סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ של מספרים חיוביים (לאו דווקא סדרה הנמצאת ב- W) קיימת סדרה $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in W$ כך שמתקיים $lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) = 0$. הוכח, כי W אינה בת מניה.

4. א. מהי עוצמת קבוצת כל הקבוצות של מספרים ממשיים שהן בנות מניה?
ב. מהי עוצמת קבוצת כל הקבוצות של מספרים ממשיים שאינן בנות מניה?
הערה: לצורך סעיף א' ניתן להשתמש באקסיומת הבחירה. האם תוכלו למצוא פתרון לסעיף ב' ללא שימוש באקסיומה זו?

5. תהי A קבוצה של מספרים חיוביים כך שלכל סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ של מספרים שונים שכל איבריה ב- A, הטור $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. הוכח (תוך שימוש באקסיומת הבחירה) כי A בת מניה.

תאריך ההגשה: 18.5.2005